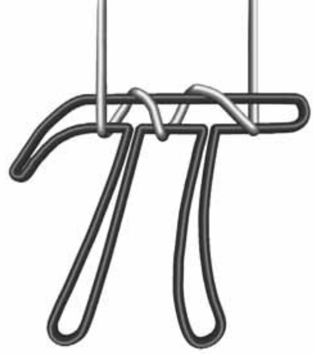


مجلهٔ Pi in the Sky

احسان یارمحمدی**

- **تارنما:** http://www.pims.math.ca/pi
- **ناشر:** Pacific Institute for the Mathematical Science
- **مکان انتشار:** کانادا
- **زبان:** انگلیسی
- **تاریخ آغاز انتشار:** ژوئن ۲۰۰۰
- **تعداد چاپ و توزیع در هر دوره:** ۲ شماره
- **هیئت تحریریه:** آنتونی کوآس[۱]، جان بومَن[۲]، موری برمِنر[۳]، جان کمپبِل[۴]، فلورین دیاکو[۵]، شارون فریسِن[۶]، گوردون هَمیلتون[۷]، کلاُس هواچِسمان[۸]، دراگوس هریمیوک[۹]، مایکل لامورِکس[۱۰]، دیوید لیمینگ[۱۱]، پاتریک مایدورن[۱۲] و فُک لِونگ[۱۳].
- **مدیر فنی:** آنتونی کوآس[۱۴]
- **هماهنگ کننده تولید:** کِلر کِرنان[۱۵]
- **طراح:** لیزا پِرلمَن[۱۶]
- **نشانی:**

Pi in the Sky
PIMS University of Victoria Site Office,SSM Building
Room A418b
PO Box 3060 STN CSC, 3800 Finnerty Road,Victoria,
BC, V8W 3RT Canada

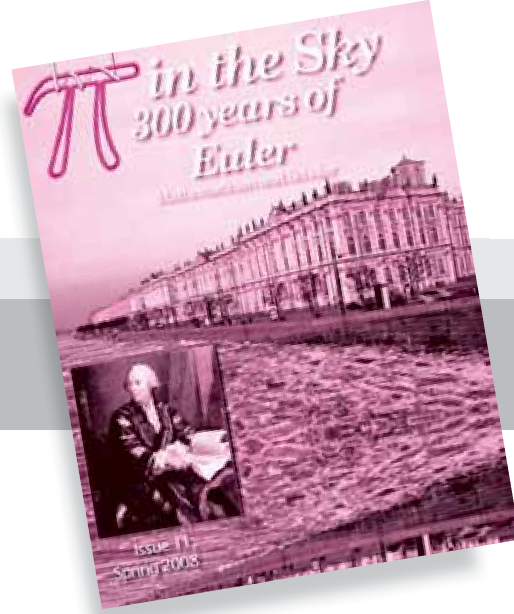
- **تلفن، دورنگار و رایانامه:**

Telephone Number: (250) 472-4271
Fax Number: (250) 721-8958
E-mail: pims@math.uvic.ca

مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» مجله‌ای دربارهٔ ریاضیات دورهٔ دبیرستان (در ایران دورهٔ دوم آموزش متوسطه) است و خوانندگان آن دانش‌آموزان و معلمان این دورهٔ تحصیلی هستند. هدف اصلی این مجله ایجاد بستری برای تولید فرهنگ ریاضی و ریاضی‌خوانی بین علاقه‌مندان به رشتهٔ ریاضی است. در ضمن، نحوهٔ ارائهٔ مطالب در این مجله به‌گونه‌ای است که بیشتر، دانش‌آموزان سال آخر دورهٔ دبیرستان و دانشجویان دورهٔ کارشناسی را مخاطب قرار می‌دهد. البته نه اینکه مطالب آن برای دانش‌آموزان سایر پایه‌های تحصیلی دورهٔ دبیرستان مطلوب نیست، بلکه به علت تنوعی که در نوع و ساختار برنامهٔ آموزشی مجله و نیز مقالات ارائه شده در آن نمایان است، خوانندگان آن باید دارای نگرشی جامع و مانع دربارهٔ موضوعات متنوع ریاضی باشند تا با مطالعهٔ این مجله، پویایی ذهن خود را محک بزنند.

دست‌اندرکاران مجلهٔ Pi in the Sky آن را هم به‌صورت مجلد و هم به‌صورت الکترونیکی و آنلاین در تارنمای ویژهٔ این مجله، در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهند. این مجله برای دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان در ایالت های «آلبرتا»[۱۷]، «بریتیش کلمبیا»[۱۸] و «واشینگتون»[۱۹] ارسال می‌شود. افرادی که مایل‌اند برای مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» مقاله یا مقالاتی دربارهٔ موضوعات متنوع ریاضی و کاربردهای آن ارسال کنند، می‌توانند با مراجعه به نشانی اینترنتی: «pims@math.uvic.ca»، این مهم را انجام دهند. مقالات ارسالی می‌تواند شامل مسائل ریاضی به همراه پاسخ درست آن‌ها، لطیفه‌های ریاضی، تصویرهای فکاهی و کاریکاتورهای ریاضی و نیز عبارت‌ها و جملات قصار مستدل دربارهٔ ریاضیات یا ریاضی‌دانان باشد. در ضمن معلمان، مدرسان، دانش‌آموزان، دانشجویان، والدین و تمامی علاقه‌مندان به آموزش ریاضی می‌توانند با ارسال نامه به سردبیر نقطه‌نظرات خود را دربارهٔ این مجله با ذکر کامل نام و نام خانوادگی، شمارهٔ تلفن به همراه کد شهر و کشور محل اقامت و نیز نشانی پست الکترونیکی ارسال کنند.

البته افرادی که می‌خواهند برای مجله مقاله بفرستند، می‌باید مقالهٔ (مقالات) خود را ترجیحاً با استفاده از نرم‌افزار «LaTex» تایپ و آماده کنند و آن را در قالب هر دو فایل «LaTex» و «PDF» متناظر آن برای مجله بفرستند. اشخاصی که به هر دلیل از نرم‌افزار «LaTex» برای مقالاتشان استفاده نمی‌کنند، می‌باید مقالات خود را با استفاده از نرم‌افزار «Microsoft Word» آماده کنند و با رعایت نکات و استانداردهای



مقاله‌نویسی موردنظر مجلهٔ Pi in the Sky، در قالب هر دو فایل «Microsoft Word» و PDF متناظر آن برای مجله ارسال کنند.
مقالات ارسال شده از این نظر که آیا موضوع و محتوای آن‌ها با اهداف مجله سازگار است یا خیر، توسط هیئت داوران بررسی می‌شوند و مقالات مورد تأیید ایشان، مجوز چاپ در مجله را دریافت می‌کنند.
مقالات تأیید شده به نام مؤلف آن‌ها در این مجله به طبع می‌رسند و ناشر حق انتشار و تکثیر آن را در قالب مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky به‌صورت مجلد و الکترونیکی دارد.

با بررسی ۱۷ شماره از مجلهٔ مزبور که از ژوئن ۲۰۰۰ تا ژانویهٔ ۲۰۱۴ منتشر شده‌اند، درمی‌یابیم که هیئت تحریریه و سردبیری این مجله دچار تغییراتی شده که بر خط‌مشی مجله و مطالب آن اثراتی داشته است. یکی از ویژگی‌های این مجله ارائهٔ توضیح مختصر و مفیدی در صفحات نخست دربارهٔ تصویر روی جلد آن است که دارای ارتباط مفهومی با یکی از مقالاتی است که در مجله گنجانده شده است. در شمارهٔ ۲ این مجله نیز قسمتی با عنوان «Teacher's Studio» وجود دارد که تقریباً شبیه به قسمت «روایت معلمان» در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است و به مطالبی اختصاص دارد که توسط معلمان ریاضی برای دانش‌آموزان در کلاس درس در یک موضوع خاص ارائه می‌شود.

مقاله‌ای که در اینجا به معرفی آن می‌پردازیم، «چند نکته دربارهٔ چندجمله‌ای درجه دوم» نام دارد که از نظر ساختار بیانی، شبیه مقالات **احمد قندهاری** در مجلهٔ «برهان متوسطه» (دورهٔ دوم) است. مطالعهٔ این مقاله را به شما ریاضی‌آموزان مخاطب مجلهٔ برهان توصیه می‌کنیم. اما قبل از ورود به این مقاله چند مثال و مسئلهٔ آن را که دارای راه‌حل نیز هستند، به‌عنوان تمرین مطرح می‌کنیم تا شما میزان توانمندی خود را در پاسخ به این تمرین‌ها که دربرگیرندهٔ سؤالات امتحان نهایی دیپلم کشورهای اروپایی نیز هستند، محک بزنید.

- معادلهٔ $x^2+2(m+1)x+m(m-1)=0$ را با جواب‌های $x_1,x_2\in R$ که در آن m عددی حقیقی است، در نظر بگیرید. در هر مورد زیر، تمام مقادیر m را که در شرط مطلوب صدق می‌کند، به‌دست آورید.
  ۱) $0<x_1<x_2$
  ۲) $x_1<x_2<0$
  ۳) $x_1<0<x_2$
- اگر k عددی حقیقی و $x_1,x_2\in R$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، شرایط لازم و کافی برای ضرایب a، b و c را به‌گونه‌ای که هر مورد روابط زیر برقرار باشد، تعیین کنید
  ۱) $k<x_1<x_2$
  ۲) $x_1<x_2<k$
  ۳) $x_1<0<x_2$
- به‌ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $(m-2)x^3-(2m-1)x^2+(m+3)x=0$ دقیقاً سه ریشهٔ حقیقی نامنفی دارد؟
- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ زیر دارای دو جواب منفی متمایز است؟

$$(2+m)\log_2^2(x+4)+2(1-m)\log_2^{(x+4)}+m-2=0$$

البته در شمارهٔ ۱۵ مجله Pi in the Sky نیز مقاله‌ای با عنوان: «از مشکلات، اشتباهات و شکست‌ها تا موفقیت‌ها»* وجود دارد که می‌تواند برای شما دانش‌آموزان قابل توجه باشد. این مقاله سه مثال دربارهٔ خطاها، استدلال‌های اشتباه‌آمیز و ناامیدی‌هایی دارد که هنگام حل مسائل ریاضی رخ می‌دهند. همچنین ترفندها و راهکارهای زیرکانه‌ای ارائه می‌دهد که به نحوی اثربخش در حل مسئله کاربرد دارند. در اینجا مثال ۱ آن را ارائه می‌کنیم و توضیحات و تفاصیلی را که نگارندهٔ مقاله آن‌ها را ارائه نکرده است و امکان دارد شما را در درک این مثال دچار چالش سازد، ارائه کرده‌ایم. در ضمن شما را به مطالعهٔ دو مثال دیگر این مقاله در شمارهٔ ۱۵ مجله تشویق می‌کنیم.

- مقدار عبارت $\dfrac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}$ را تعیین کنید.

تعدادی از دانش‌آموزان راه‌حل زیر را ارائه کرده‌اند:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1-\sin 10^\circ)}$$

در واقع نگارندهٔ این مقاله با ذکر این مثال خواسته است بیان کند که هر چند تعدادی از دانش‌آموزان از روابط مثلثاتی

$$\begin{cases}\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\\ \text{یا}\\ \cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\end{cases}$$

و $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ برای ساده کردن این عبارت استفاده کرده‌اند، اما عبارت به‌دست آمده با کمک این دو رابطهٔ مثلثاتی، به این علت که مقادیر $\sin 10^\circ$، $\cos 20^\circ$ و $\cos 10^\circ$ برای دانش‌آموزان مشخص نیست، از پیچیدگی بیشتری برای ساده کردن، نسبت به عبارت نخستین برخوردار شده است. همین موضوع ادامهٔ کار را برای این دانش‌آموزان مشکل و در بعضی موارد ناممکن می‌سازد. بنابراین، درک مسئله از جایگاه خاصی برخوردار است و چون درک مسئله از جانب افراد گوناگون، متفاوت است، بنابراین ممکن است که راه‌حل‌های متمایزی نیز برای آن پیدا شود. بنابراین، راهکار خردمندانه این است که، به‌ویژه در جلسات برگزاری امتحان، از روش‌هایی برای حل مسئله استفاده کنید که مدت زمان و چالش کمتری را برای شما ایجاد می‌کنند. البته چون نگرش‌های دانش‌آموزان به ارائهٔ راه‌حل مسائل و درک آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است، بنابراین روشن است که راه‌حل‌های گوناگونی توسط آن‌ها ارائه خواهد شد. اما اگر در این مثال با استفاده از رابطهٔ $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$ مقدار $\sin 80^\circ$ را تعیین کنیم، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\sin(60^\circ+20^\circ)-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 60^\circ-\sin 20^\circ}$$

چون دانش‌آموزان از مقادیر $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ آگاهی دارند. بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 60^\circ-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ\times\frac{1}{2}-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

درضمن اگر در عبارت $\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}$ دانش‌آموزی توانایی تشخیص استفاده از رابطه‌ای مناسب و متناسب با این عبارت مانند: $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ را برای تعیین مقدار $\cos 10^\circ$ داشته باشد، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ+2\sin 30^\circ\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}$$

چون دانش‌آموزان از مقادیر $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ و $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ آگاهی دارند. بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ+2\sin 30^\circ\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+2\times\frac{1}{2}\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

اما اگر به همان راه‌حل نخست که دانش‌آموزان در ادامهٔ آن دچار سردرگمی شده بودند، مراجعه کنیم و با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ مقدار عبارت را ساده‌تر کنیم، داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1-\sin 10^\circ)}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1-2\sin 5^\circ\cos 5^\circ)}$$

اکنون با استفاده از روابط $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$ و $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ داریم:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(1-2\sin 5^\circ\cos 5^\circ)}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ-\cos 5^\circ)^2}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ-\sin 85^\circ)^2}$$

چون

$$\begin{cases}\sin 5^\circ=\sin(45^\circ-40^\circ)=\sin 45^\circ\cos 40^\circ-\sin 40^\circ\cos 45^\circ\\ \qquad=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 40^\circ-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ\\ \text{و}\\ \sin 85^\circ=\sin(45^\circ+40^\circ)=\sin 45^\circ\cos 40^\circ+\sin 40^\circ\cos 45^\circ\\ \qquad=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 40^\circ+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ\end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sin 5^\circ-\sin 85^\circ)^2}=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ)^2}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 40^\circ)^2}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ}{2\cos 10^\circ(\sqrt{2}\times\sin 40^\circ)^2}=\frac{\cos 20^\circ}{4\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ}$$

سپس با استفاده از رابطهٔ $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ و چون می‌دانیم که $\sin 40^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ$، از ضرب عبارت $\frac{2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ}$ در عبارت بالا داریم:

$$\frac{2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ}\times\frac{\cos 20^\circ}{4\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin^2 40^\circ}$$

$$=\frac{1}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin 40^\circ}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

داریم:

$$\frac{1}{8\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin 40^\circ}$$

$$=\frac{1}{8\left[\frac{1}{2}(\sin(20^\circ+10^\circ)+\sin(20^\circ-10^\circ))\right]\sin 40^\circ}$$

$$=\frac{1}{4(\sin 30^\circ+\sin 10^\circ)\sin 40^\circ}=\frac{1}{2\sin 40^\circ+4\sin 10^\circ\sin 40^\circ}$$

در ضمن با استفاده از رابطهٔ

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

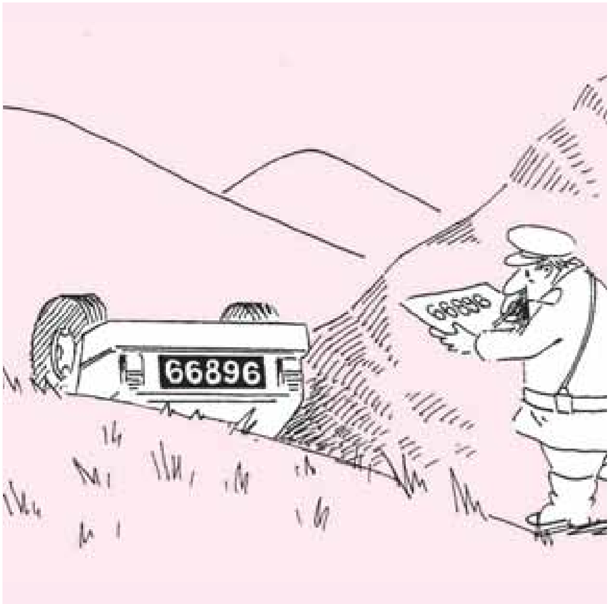
داریم:

$$\frac{1}{2\sin 40^\circ+4\sin 10^\circ\sin 40^\circ}=\frac{1}{2\sin 40^\circ-2(\cos 50^\circ-\cos 30^\circ)}$$

$$=\frac{1}{2\sin 40^\circ-2\cos 50^\circ+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

چون: $\cos 50^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\sin 40^\circ$، بنابراین:

$$\frac{1}{2\sin 40^\circ-2\sin 40^\circ+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



هر چند که محاسبات بالا از روند پیچیده‌تری نسبت به دو راه‌حل قبل برخوردار بود، اما در نهایت به جواب درست به‌دست آمده از دو روش قبل و استفادهٔ بیشتر ما از دانسته‌هایمان برای حل این مثال منجر شد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در مواجهه با مسائل به ظاهر پیچیده و مشکل، بر توانایی‌های خود متکی باشیم و زود تسلیم این نمونه از مسائل نشویم.

در شمارهٔ ۷ مجلهٔ Pi in the Sky مقاله‌ای نیز با عنوان «تعمیم [روش] تقسیم ترکیبی» وجود دارد که از نظر ساختار و محتوا نزدیک به مقالات مندرج در مجلهٔ برهان متوسطه (دورهٔ دوم) است که مطالعه و یادگیری آن برای ریاضی‌آموزان مفید است. در ضمن، در شمارهٔ ۴ این مجله که در دسامبر سال ۲۰۰۱ منتشر شده است، مقاله‌ای با عنوان «زندگی و مسافرت در بعد چهارم»[20] به قلم **توماز کاژینسکی**[21] وجود دارد که **سعید علیخانی** ترجمهٔ آن را با ارائهٔ اضافاتی در انتهای آن ترجمه با عنوان «زندگی در بعد چهارم» در شمارهٔ ۷۸ مجله برهان متوسطه (دورهٔ دوم) در تابستان ۱۳۹۲ به چاپ رسانده است.

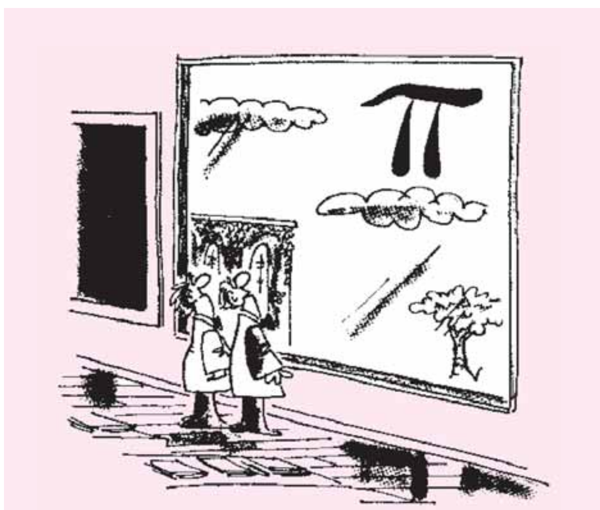
در شمارهٔ ۹ مجله که در دسامبر سال ۲۰۰۵ در اختیار مخاطبان قرار گرفته است، مقاله‌ای با عنوان «روابط ریاضیاتی در هنر» از **رضا سرهنگی**، استاد ایرانی گروه ریاضی «دانشگاه تَوسِن»[22] منتشر شده است. این مقاله برای افرادی که به دنبال مطالبی دربارهٔ کاربرد ریاضیات در زندگی پیرامون خود هستند، قابل استفاده است.

در شمارهٔ ۱۱ مجلهٔ Pi in the Sky که در بهار سال ۲۰۰۸ به جامعهٔ ریاضیات عرضه شده است، به مناسبت سیصدمین سال تولد **لئونارد اویلر**، ریاضی‌دان برجسته و نامدار سوئیسی، تصویری از او، جلد این شماره از مجله را مزین کرده است. البته هیئت تحریریهٔ مجله نیز به پاس قدردانی از وی، سرمقاله را به یادش نگاشته است. در ضمن،

مقالات «اویلر و تابع گاما» به قلم **تام آرچیبالد**[۲۳]، «ساخت پل‌ها برای ریاضیات گسسته» نوشتهٔ **پیتر دوکس**[۲۴]، «اویلر، مجموع‌های نامتناهی و تابع زتا» اثر عضو هیئت تحریریهٔ این مجله **مایکل لامورِکس**، «چه کسی دایرهٔ اویلر را ابداع کرد؟» به قلم **کلاُس هواچسمان**، عضو دیگر هیئت تحریریهٔ مجله، و «لئونارد اویلر: زندگی‌نامه» نوشتهٔ **آلکساندر لیتواک**[۲۵] و **آلینا لیتواک**[۲۶] به‌چشم می‌خورند که نشان‌دهندهٔ احترام فراوانی است که دســت‌اندرکاران مجله برای لئونارد اویلر قائل‌اند و لــذا این تعداد مقاله را دربارهٔ او و کارهایش در این شـــماره از مجله گنجانده‌اند.

در شمارهٔ ۳ مجلهٔ Pi in the Sky که در ژوئن ۲۰۰۱ عرضه شده است، مقاله‌ای با عنوان «اصل استقرا»[۲۷] به قلم عضو هیئت تحریریهٔ مجله، **دراگوس هریمیوک** نگاشـــته شده است که پیگیری آن را به دانش‌آموزانی که درس «جبر و احتمـــال» را پیش روی خود دارند، توصیه می‌کنیم. اما در همین‌جا و قبل از مطالعهٔ این مقاله توسط شما، به علت اهمیت و جایگاه «اصل استقرا»، مسائل آن را ارائه می‌کنیم تا به این واسطه به‌عنوان سندی آماده شده، مسائلی را در این زمینه مورد بررسی قرار دهید و با تمرین‌هایی دربارهٔ «اصل استقرا» از نوع «Pi in the Sky» نیز آشنا شوید.

- بـــرای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعـــی n] ثابت کنید:
$$\sqrt{1+\sqrt{2+\dots+\sqrt{n}}}<3$$
- ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی n]، عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی] n رقمی A که هر رقم آن ۱ یا ۲ است، وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که A بر 2^n بخش‌پذیر است.
- یک صفحه به‌وسیلهٔ n خط به چند ناحیه تقسیم شده است، به‌گونه‌ای که هر ناحیهٔ همسایه با ناحیهٔ دیگر دارای رنگ‌آمیزی متفاوت است. ثابت کنید که صفحه می‌تواند به‌وسیلهٔ دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.



- فـــرض کنیـــد: $Z=\{1,2,3,\dots\}$. تمام توابـــع $f: Z \to Z$ را به گونه‌ای پیدا کنید که داشته باشیم:
  ۱. $f(2)=2$
  ۲. $f(n+1)=1+1f(1)+2f(2)+\dots+nf(n)$
- تمـــام زیرمجموعه‌های مجموعـــهٔ $\{1,2,\dots,n\}$ را که هیچ دو عدد متوالی را شامل نمی‌شوند، در نظر بگیرید. ثابت کنید که مجموع مربعات حاصل‌ضرب تعداد اعداد در این زیرمجموعه‌ها برابر است با: $(n+1)!-1$.

(**مثـــال:** اگـــر $n=3$ باشـــد، زیرمجموعه‌هـــا عبارت‌انـــد از: $\{1,3\}$، $\{3\}$، $\{2\}$ و $\{1\}$ و مجموع برابر است با:
$1^2+2^2+3^2+(1\times3)^2=4!-1$

البته چون در ادامهٔ مقاله «اصل استقرا» و در صفحهٔ ۲۶ مجله در قسمت «Math Challenges» مسائلی پیکارجو دربارهٔ «اصل استقرا» ارائه شده است، به علت ارتباط مسائل آن با موضوع مزبور، آن‌ها را در این قسمت و در ادامه قرار می‌دهیم.

- بـــرای هر عدد صحیح مثبت [عدد طبیعی n] ثابت کنید که:
$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{n}}}}<3$$
- فرض کنید که در یک صفحه n خط به‌گونه‌ای که هیچ دو تا از آن‌ها با یکدیگر موازی و هیچ سه تا از آن‌ها با یکدیگر همرس نباشند، وجود دارند. ثابت کنید که صفحه توسط این خطوط به $\frac{n(n+1)}{2}+1$ ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است.
- ثابت کنید که n دایـــره در یک صفحه، صفحه را حداکثر به n^2-n+2 ناحیه تقسیم می‌کنند.
- یک صفحه به وسیلهٔ n دایره به چند ناحیه تقسیم شده است. نشان دهید که صفحه را می‌توان به وسیلهٔ دو رنگ [به‌گونه‌ای که هر ناحیه همسایه با ناحیه دیگر دارای رنگ‌آمیزی متفاوت باشد] رنگ‌آمیزی کرد.
- فرض کنید $Z=\{1,2,3,\dots\}$. تمام توابع $f: Z \to Z$ را به‌گونه‌ای پیدا کنید که داشته باشیم:
  ۱. $f(1)=1$
  ۲. $\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\dots+\frac{1}{f(n)f(n+1)}=\frac{f(n)}{f(n+1)}$

تذکر: برای هر $n>1$ از اتحاد زیر که به وســیلهٔ استقرا ثابت شده است، استفاده کنید.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

قسمت «Book Review» در مجلهٔ Pi in the Sky ـ که در مجلهٔ «برهان متوســطه» (دورهٔ دوم) از آن به‌عنـــوان «معرفی کتاب» یاد

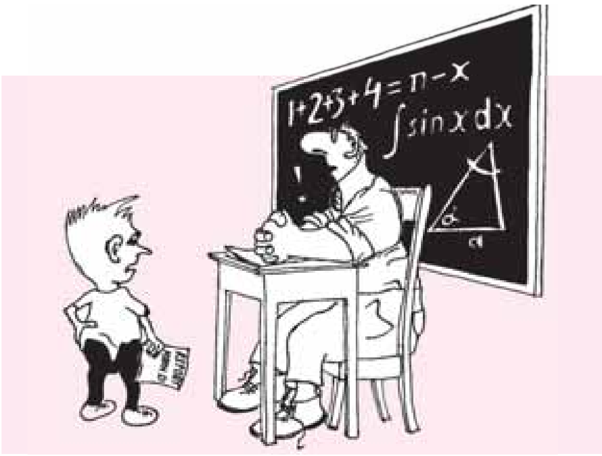
می‌شود ـ نیز شامل مطالبی در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۴ مجله و صفحات ۲۶ و ۲۷ شـــمارهٔ ۱۱ مجله است. در ضمن در شماره‌های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۱۱ مطالبی دربارهٔ زندگی‌نامه و دستاوردهای ریاضی‌دانان قرار داده شده است که مطالعهٔ آن‌ها می‌تواند برای افرادی که به تاریخ ریاضیات علاقه‌مند هســـتند، جالب باشد. نمونه‌ای از سؤالات امتحانات پایانی دیپلم در کشورهای گوناگون آسیایی و اروپایی نیز در شماره‌های ۱ و ۲ مجلهٔ ریاضی «Pi in the Sky» به چشم می‌خورد که ریاضی‌آموزان می‌توانند با مراجعه به آن‌ها، از چگونگی و تفاوت ســـؤالات مندرج با سؤالاتی که در داخل کشور به‌عنوان سؤالات امتحانات بیان می‌شوند، مطلع شوند. در شـــماره‌های مختلف مجله در بخشی تحت عنوان «math jokes» لطیفه‌هـــای ریاضی و عبارات و جملات قصار ریاضی آمده است که ترجمهٔ بعضی از آن‌ها در بخش «ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی» مجلهٔ برهان، در دو سال گذشته، آمده است.

در تمـــام شـــماره‌های مجلـــه، قســـمتی بـــا عنـــوان «Math Challenges» وجـــود دارد که به ارائهٔ مســـائل پیکارجو در زمینه‌های متفاوت ریاضیات، برای علاقه‌مندان می‌پردازد. افرادی که به حل مسائل پیکارجو علاقه‌مند هستند، می‌توانند پاسخ‌های درست خود را به نشانی مجله ارسال کنند تا در شماره یا شماره‌های بعد به اســـم خود آن‌ها چاپ شود. در صفحهٔ ۳۱ شمارهٔ ۱۱ مجله، قضیه‌ای به همراه اثبات آن با عنوان «یک مسئلهٔ پیکارجوی هندسه» به قلم یک ایرانی به‌نام **دانش فُروُهَری** وجود دارد که برای ایجاد انگیزش و هیجان در شما دانش‌آموزان عزیز، برای نوشتن و ارسال مقاله به آن مجله هر چند با حجم کم در میان شما ریاضی‌آموزان، آن را در ادامه مطرح می‌کنیم.

- فرض کنید که AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند. ثابت کنید: $3(AB^2+AC^2+BC^2)=4(AM^2+BN^2+CP^2)$.

علاقه‌منـــدان، می‌توانند با مراجعه به این شـــمارهٔ مجله، راه‌حل فرســـتنده را ملاحظه کنند. لازم به ذکر است که با آگاهی از قضیهٔ میانه‌ها در مثلث (دستور محاسبهٔ طول هر میانه با داشتن طول‌های اضلاع مثلث) اثبات آسان خواهد بود.

در ضمـــن در صفحـــهٔ ۱۳ شـــمارهٔ ۱۶ مجلـــهٔ ریاضـــی Pi in the Sky مقاله‌ای به قلم **ویکتور ژو** با عنوان «ســـنگ ـ کاغذ ـ قیچی» وجود دارد که تداعی‌کنندهٔ بازی خاطره‌انگیز دوران کودکی ماست. امیدواریم پیگیری این مقاله برای شما یادآور روزهای خوش گذشته باشد. در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱ مجله، مقاله‌ای دربارهٔ «تشابه»[28] وجود دارد که مطالعهٔ آن را به دانش‌آموزانی که درس‌های هندسهٔ ۱ و ۲ را پیش روی خود دارند، پیشنهاد می‌کنیم. همچنین به دانش‌آموزان علاقه‌مند به درس هندسه توصیه می‌کنیم که به صفحهٔ ۱۸ شمارهٔ ۱ مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky مراجعه کنند و مقالهٔ «ساختار مثلث» اثـــر **کلاُس هواچِسمان** را مطالعه کنند. برای دانش‌آموزانی که تصور



می‌کنند، استفاده از تارنمای «ویکی‌پدیا» منبع مناسبی برای انجام تحقیقات و پژوهش‌های آن‌ها نیســـت نیز مقالهٔ «دایره‌های پنهان و رقم‌های π» به قلم **رِینهارد ایلنِر** را در صفحهٔ ۲۰ شـــمارهٔ ۱۷ مجله پیشنهاد می‌کنیم. زیرا بیشتر منابعی که در انتهای مقاله مزبور ارائه شده‌اند، برگرفته از تارنمای «ویکی‌پدیا» هستند.

در پایان بیان می‌کنیم، آنچه که در این مقاله آمد، تنها گوشه‌ای از برگ‌های زرین مجلهٔ ریاضی Pi in the Sky است. به‌همین دلیل شما را به تهیهٔ تمامی شماره‌های این مجله ترغیب می‌کنیم تا با دریافت و مطالعهٔ یکایک مقالات مندرج در آن، به دانش و بینش ریاضی خود بیفزایید.

پی‌نوشت‌ها

1. Anthony Quas
2. Johan Bowman
3. Murray Bremner
4. John Campbell
5. Florin Diacu
6. Sharon Friesen
7. Gordon Hamilton
8. Klaus Hoechsmann
9. Dragos Hrimiuc
10. Michael Lamoureux
11. David Leeming
12. Patrick Maidorn
13. Fok Leung
14. Tel: (250) 721-7463, E-mail: aquas@uvic.ca
15. Clare Kiernan
16. Lisa Pearlman
17. Alberta
18. British Columbia
19. Washington
20. Life and Travel in 4D
21. Tomasz Kaczynski
22. Towson University
23. Tom Archibald
24. Peter Dukes
25. Alexander Litvak
26. Alina Litvak
27. Induction Principle
28. Similarity

* ترجمهٔ کامل این مقاله، به قلم یکی از خوانندگان مجله، در شمارهٔ آیندهٔ برهان خواهد آمد.

** ehsan_yarmohommadi@yahoo.com